پرویز شهریاری

به درك شهودی در ریاضیات اهمیت بدهیم*

۱. ورود به مطلب

بدون معرفت شهودی، نه می‌توان درس را به‌درستی فهمید و نه می‌توان از دانش و آگاهی خود، درموارد لازم استفاده کرد؛ و تکامل معرفت شهودی، که به‌دشواری قابل تعریف‌است، تنها از راه توجیه و تجزیه و تحلیل مفهومها، گزاره‌ها، و روشها میسر است.

هانری پوانکاره حق داشت که می‌گفت منطق نمی‌تواند تصوری کامل دربارهٔ مجموعهٔ دانشها به‌ما بدهد، این تصور تنها از راه معرفت شهودی به‌دست می‌آید، واین داوری برای هرشاخه‌ای از دانش درست است. بدون معرفت شهودی، دانش ما شکلی ظاهری و صوری دارد و به "فرهنگی کوچك" می‌ماندکه شامل برخی آگاهیهای عمومی است و به "ماهیت" و "درون" موضوعات توجهی‌ندارد. معرفت شهودی آن‌است که آدمی "درون وحال را بنگرد ونه "برون وقال را".[1]

بیش از خود درسهای ریاضی، روشهای آن ونقشی که معلم در تنظیم و توجیه‌کار خود به‌عهده دارد، می‌تواند موجب تکامل معرفت شهودی در دانش‌آموزان شود؛ و این کار معلم به‌ناچار باید متکی برمنابعی باشد‌که باکمال تأسف به‌ندرت می‌توان نشانی از آنها درزبان فارسی‌پیداکرد. دراین‌مقاله تاجایی‌که مقدوراست‌کوشش می‌کنیم که به‌این بحث بپردازیم، وبا مثالهایی‌آن را روشن‌کنیم.

۲. پیش‌آگاهی

یکی ازگونه‌های ظهور معرفت شهودی در ریاضیات، این است که دانش‌آموز مفهومها و

---

* هیأت تحریریهٔ جنگ ریاضی دانشجو ازآقای پرویز شهریاری که‌باوجود مشغلهٔ فراوان قبول زحمت کرده، مقالهٔ حاضر را نوشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌کند.

۱. ما درون را بنگریم‌وحال را نی برون را بنگریم وقال را
(مولوی)

گزاره‌های ریاضی را، پیش از تعریف دقیق و استنتاجهای قیاسی، چگونه "می‌بینند"! این "بینش" می‌تواند براساس آگاهیهای او در این شاخهٔ ریاضیات باشد (پیش آگاهی)، و یا درنتیجهٔ این آگاهیها ظاهر شود (آگاهی بعدی).

پیش آگاهی، درواقع بر تمامی ریاضیات مدرسه‌ای تکیه دارد، زیرا (به‌جز درموارد بسیار نادر) دانش‌آموزان تنها وقتی تعریف دقیق و رسمی مفهومی را می‌فهمندکه بتوانند درکی شهودی از آن داشته باشند. به‌همین مناسبت، و به‌خصوص وقتی‌که با مفهومها وگزاره‌های مهم سروکار داریم، باید از درك شهودی دانش‌آموزان، چه برای مفهومی‌که مطرح شده است و چه برای مفهومهای نزدیك به آن، یاری‌گرفت. برای این منظور، قبل از طرح رسمی تعریف باید درحد امکان از اصطلاحهایی‌که به درس مربوط می‌شود (خط، شکل، جسم، طول، سطح، حجم، مماس، تحدب، برابری تقریبی و...) صحبت‌کرد و معنای آنها را به‌صورتی عینی وملموس توضیح داد. سپس‌به‌تدریج به آگاهیهای‌لازم(مساحت سطح‌بزرگتر است ازمساحت بخشی از آن، و برابر است با مجموع همهٔ بخشهایی‌که شکل مورد نظر را تشکیل داده‌اند و...) افزود و با طرح تمرینهایی، دانش‌آموزان را با موضوع اصلی آشنا کرد.

۳. آگاهی بعدی

تکامل معرفت شهودی، بیش از همه براساس تشریح موضوع به‌کمك مثالها، مسئله‌ها و تصویرهاست. ضمن این "تجزیه وتحلیل"، باید به صورتی‌کوتاه از آن مفهومها، اندیشه‌ها ویا آگاهیهایی نام بردکه برای جلب توجه دانش‌آموز لازم به‌نظر می‌رسد: "دراین مسئله، دومجهول وجود دارد، بنابراین به دو معادله نیاز داریم، چون تعداد معادله‌ها باید برابر تعداد مجهولها باشد"؛ "به‌این‌نکته توجه‌کنیدکه معادله $f(x) = 0$، دربازهٔ مفروض، دست کم یك‌ریشه دارد، وچون مقدار $f(x)$ در دو انتهای بازه، علامتهای مختلفی دارد و نمودار آن خمی به هم پیوسته است، به ناچار باید درنقطه‌ای از آن بازه محورطول را قطع‌کند"؛ "رابطهٔ‌حاصل‌رامی‌توان به‌طورمشروط به‌صورت $1/\infty = 0$ نوشت. این‌رابطه درواقع‌معرف این حقیقت است‌که اگر واحد را بر‌عددی بسیار بزرگ تقسیم‌کنیم، عددی بسیارکوچك به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم آن را تقریباً برابر صفر بدانیم"؛ و از این دست مثالها.

ضمن تکامل معرفت شهودی، باید به تدریج و به‌طور منظم "عدم دقت" را در مورد مفهومهای اصلی روشن‌کرد. در واقع، هرمفهوم دقیق ریاضی از نظر تاریخی از همین "گذرگاههای تنگ وپر پیچ وخم وآسفالت نشده" گذشته است. مثلا مفهوم مشتق را درنظر بگیریم. این مفهوم درکاربردهای خود به‌عنوان سرعت تغییر یك‌کمیت نسبت به‌کمیت دیگر، یا به‌عنوان شیب (ضریب زاویه) عنصری از نمودار تابع، ظاهر می‌شود؛ و تعریف رسمی مشتق، به عنوان حد نسبت نموها، چیزی جز "دقیق‌کردن" مضمون همین مفهوم "پرداخت نشده" نیست. به‌این ترتیب، چه در تعریفها وچه بعد از آن، باید مضمون اصلی را شکافت و در همه جا برمعرفت شهودی دانش‌آموز تکیه‌کرد.

هنوز بعضیها گمان می‌کنند که اینکه دانش‌آموزی نتواند مثلا ریشه‌های دقیق معادله‌ای را به‌دست آورد، به‌معنای ناتوانی او درحل مسئله است، درحالی‌که باید به‌دانش‌آموز امکان داد تا ریشه‌های تقریبی را حدس بزند و با روش آزمایش وخطا به‌تقریب لازم برسد. اگر شرایطی پیدا شود که دانش‌آموزان بتوانند از سالهای دوره راهنمایی تحصیلی با ماشینهای حساب کوچك كار كنند، فرصت پر ارزشی برای این کار به‌دست می‌آید.

۴. ارزیابی موقعیت

روشنترین و مهمترین شکل بروز معرفت شهودی در ریاضیات، عبارت است از توانایی برخورد با موضوعهای تازه وموقعیتهای ناآشنا،قدرت پیش‌بینی نتیجه‌های درست وانتخاب مسیری که بدین نتیجه‌ها منجر می‌شود، و همچنین امکان تشخیص نتیجه‌گیریهای نادرست. البته چنین معرفت شهودی پر باری باید برمفهومها وگزاره‌هایی از ریاضیات تکیه داشته باشد که در بند ۲ و ۳ دربارهٔ آنها گفتگو کردیم.

همه‌جا، چه درمسئله‌های نظری و چه درمسئله‌های عملی، ارزیابی درست موقعیت را باید بخشی ازحل مسئله دانست، و دانش‌آموزان را عادت داد تا توانایی پیش‌بینی مسیر راه حل، و درموارد لازم تخمین جواب، را داشته باشند. پیش‌ازحل هرمسئله، باید موقعیت آن را کاملا روشن کرد و با رسم شکلها و مقایسهٔ مسئله با مسئله‌های مشابهی که قبلا حل شده است، تصوری روشن دربارهٔ آن به‌وجود آورد. برای بالابردن قدرت تصور وشهود دانش‌آموزان باید آنها را واداشت تا پاسخ مسئله را پیش‌ازحل کامل آن به‌صورت یك نابرابری ("بیشتر از دوساعت")، یا یك نابرابری دوطرفه ("از دوتا پنج ساعت")، یا تخمین مقدار ("در حدود سه ساعت") حدس بزنند. طبیعی است که ارزیابی پاسخ پیش از حل مسئله، برای دانش‌آموزان مختلف متفاوت خواهد بود، ولی بعد از حل مسئله و پیداکردن جواب دقیق، روشن می‌شود که‌حدس‌چه‌کسی به‌جواب نزدیکتر بوده‌است وچه‌کسی دچاراشتباه شده است؛ وهمین امر موجب تکامل درك شهودی آنها می‌شود.

یك مثال ساده. فرض کنید این مسئله مطرح باشد: "شیر اول حوض را در ۲ ساعت وشیر دوم حوض را در ۴ ساعت پرمی‌کند. اگر هر دوشیر باز باشند، حوض در چه مدتی پر می‌شود؟" ابتدا روشن می‌کنیم که شیر اول قویتر است (ومی‌توان آن را مثلا در شکل با لوله‌ای با قطر بزرگ نشان داد). بعد توضیح می‌دهیم که شیر دوم هم به‌کمك شیر اول آمده‌است؛ بنابراین زمان لازم کمتر از ۲ ساعت می‌شود. با اندکی توجه می‌توان مرز پایینی جواب را پیداکرد: اگر شیر دوم قدرت شیر اول را داشت، آن وقت زمان لازم برای پر شدن حوض نصف می‌شد. بنابراین، با توجه به ضعیفتر بودن شیر دوم، متوجه می‌شویم که زمان لازم برای پرکردن حوض بیشتر از یك ساعت است. بهاین ترتیب پیش ازحل مسئله محدوده‌هایی برای جواب پیداکرده‌ایم: بین ۱ ساعت و ۲ ساعت. وقتی‌که دانش‌آموزعادت کند پیش از حل مسئله نوعی ارزیابی از جواب به عمل آورد، علاوه برارزشهای دیگر، معیاری دراختیاراوقرارمی‌گیرد تا به‌کمك آن بتواند بعدازحل دقیق‌مسئله‌جواب‌را کنترل کند.

زمانی‌که به خاطر این‌گونه بحثها صرف می‌شود، به هدر نمی‌رود. اگر دانش‌آموز این قدرت را پیدا کند که حتی برای مسئله‌های بسیار سادهٔ عملی، مدلی ریاضی طرح کند، برای او بسیار با ارزشتر از آن است که بتواند به‌صورت خودکار مسئله‌های رسمی ریاضی را با توجه به‌فرمولهایی که یادگرفته است، حل کند.

۵. برآورد و آزمایش

ارزیابی‌موقعیت و پیش‌بینی جواب، باید بر "برآوردکردن" تکیه داشته‌باشد. برآورد اغلب ذهنی و شفاهی است و بنابراین باید دانش‌آموزان را به محاسبهٔ ذهنی عادت داد. حدس تقریبی جواب می‌تواند با یك یا دو رقم درست و یا حتی درحدود آن باشد.

مثالی بیاوریم. فرض‌کنید بخواهیم حاصل این مقدار را برآورد کنیم:

$$a=\frac{۲٫۳۷۱\times۷۲۲}{۵۱٫۶+۰٫۰۹۷۶\pi}$$

صورت‌کسر به تقریب برابر است با

$$۲٫۴\times۷\times۱۰^{۲}\approx۱۷\times۱۰^{۲}$$

درمخرج، جملهٔ دوم نسبت به‌جملهٔ اول مقدار کوچکی است، وبنابراین می‌توان آن‌را نادیده گرفت به‌این ترتیب

$$a\approx\frac{۱۷\times۱۰^{۲}}{۵\times۱۰}\approx۳۴$$

یادآوری می‌کنیم‌که اگر مقدار a را به‌کمك ماشین حساب محاسبه‌کنیم، برابر بـا ۳۲٫۹ می‌شود.

برای تقویت قدرت محاسبهٔ ذهنی و براورد مقدارهای عددی، می‌توان از مسئله‌های مربوط به‌محاسبهٔ بخش درست ریشه‌ها ولگاریتمها استفاده‌کرد؛ ویا پرسشهایی ازاین قبیل: "وزن‌کرهٔ فلزی بـه قطر یك دسی مترچقدر است؟" ؛ "چند نفر روی زمین فوتبال می‌توان جاداد؟" ؛ "در شهرتهران چند مدرسه‌وجود دارد؟"

هرکسی برای خود قـانونی در ذهن پیدا می‌کند، ولی در اینجا چند قانون ساده را برای‌گردکردن عددها وبازکردن مسیر برآورد، می‌آوریم. اگرموقع محاسبهٔ مقدارعددها، یکی از عـاملهای ضرب را بزرگ‌کرده‌اید، عامل دیگر راکوچك‌کنید. مثلا برای ضرب ۲٫۵ × ۳٫۵، آن‌را به‌صورت ۸ = ۲ × ۴ یا ۹ = ۳ × ۳ درنظر بگیرید، نه ۶ = ۲ × ۳ یا ۱۲ = ۳ × ۴ (مقدار دقیق آن برابر ۸٫۷۵ است). درجمع هم از همین قاعده استفاده کنید. درتفریق و تقسیم‌گردکردن را باید به‌یك نسبت انجام داد: یا هردو راکوچك‌کرد و یا هردو را بزرگ. افزون براین، باید توجه داشت کدگاهی باکم‌کردن مقدارهای تقریبی

ممکن است خیلی از واقعیت دورشویم. مثلاً، اگر به این ترتیب براوردکنیم

$$\frac{۱}{۲٫۱۱ \times ۲٫۸۷ - ۵٫۱۷ \times ۱٫۲۲} \simeq \frac{۱}{۲ \times ۳ - ۵ \times ۱} = ۱$$

دچار اشتباهی جدی شده‌ایم (کافی است در جملهٔ دوم مخرج، ۱٫۲۲ را با ۱٫۲، ونه ۱، عوض‌کنیم تا اشتباه روشن شود). جواب این‌کسر بعد ازگردکردن برابر ۴ — است.

درمحاسبه‌های تقریبی به‌کمك ماشین حساب هم باید ازهمین روش استفاده‌کرد. بعد ازگردکردن عددها، محاسبه‌ها را با ماشین حساب انجام می‌دهیم، سپس‌گردکردن را روی رقم بعدی عددها درنظرمی‌گیریم؛ باید جوابها نزدیك به‌هم باشند، درغیر این صورت باید آزمایش را تکرارکنیم.

باطرح اینگونه مثالها وپی‌گیری درکار، می‌توان‌قدرت معرفت شهودی دانش‌آموزان را بالا برد. این توانایی سرانجام به‌مرحله‌ای می‌رسدکه دانش‌آموز بتواند باحذف عامل‌های ناچیز جواب را حدس بزند وحتی اشتباه تقریب خود را ارزیابی‌کند.

به چند مثال توجه کنید. در رمان فروشندهٔ باد اثر آلکساندر رمانویچ بلیایف (۱۸۸۴–۱۹۴۲)، این قطعه آمده است: "راوی بایك نفردیگر از انباری بازدید می‌کندکه در آن‌جاگلوله‌هایی‌گذاشته شده است. اولی می‌کوشدگلوله‌ای‌را بلندکند، ولی نمی‌تواند. دومی می‌گوید این عجیب نیست،حتی‌هراسبی نمی‌تواند چنین باری را تکان دهد، آخر این گلوله به‌اندازهٔ یك‌کیلومترمکعب هواوزن دارد."کسی‌که تاحدی توانایی برآورد مقدارها را داشته‌باشد،نادرستی این‌تصور دربارهٔ اسب را درمی‌یابد. یك‌کیلومترمکعب هوا به‌اندازهٔ

$$۱٫۳ \times (۱۰^۳)^۳ \text{ kg} = ۱٫۳ \times ۱۰^۶ \text{ ton}$$

وزن دارد. ظاهراً نویسنده‌کتاب بایدکیلومترمکعب را برابر $۱۰^۳$ مترمکعب‌گرفته باشد.

مثال دیگر. این چیستان مشهور راکه "ما وما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما،گر تو هم با ما شوی، ماجملگی صد می‌شویم" می‌توان با معادله حل‌کرد. ولی‌راه دیگری‌هم برای تقویت نیروی معرفت شهودی وجود دارد: تعداد غازها مضربی از۴ وعددی دورقمی است. ۴۰ را امتحان می‌کنیم:

$$۴۰ + ۴۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۱ = ۱۱۱$$

۳۲ را امتحان می‌کنیم:

$$۳۲ + ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۱ = ۸۹$$

تنها $n = ۳۶$ می‌ماند وآزمایش درستی جواب را نشان می‌دهد.

مثال‌آخر. فرض‌کنیم $a = \sqrt[۳]{۱۷۵۷۶}$، و می‌خواهیم بدانیم‌که a برابرکدام عدد صحیح است. به‌سادگی معلوم می‌شود

$$۲۰ < a < ۳۰$$

چون عدد بالا به ۶ ختم شده است، تنها $a = ۲۶$ جواب است.

چنین کارهایی تنها منحصر به کلاسهای پایین نباید باشد. این روشها هیچ تناقضی با راه حل فرمولی، و مثلا حل معادله و دستگاه ندارد.

۶. تجزیه و تحلیل مسئله‌ها

یکی از راههای بالا بردن معرفت شهودی در ریاضیات، تجزیه و تحلیل مسئله‌هاست. این، قبل‌ازهمه به‌انتخاب روش‌حل مربوط می‌شود. کتابهای دبیرستانی (وحتی دانشگاهی) معمولا به بخشهایی تقسیم شده‌اند ودرهر بخش روشهایی برای حل مسئله‌ها آمده است. ولی مسئله‌هایی‌که در دانشهای دیگر و یا طبیعت مطرح می‌شود تقسیم بندی نشده‌اند، و برای حل آنها باید روشهایی اندیشید. به‌همین دلیل مناسب است که گهگاه چنین مسئله‌هایی مطرح شود.

با همه اینها و قبل از هر چیز، روشهایی در ریاضیات وجود داردکه بسیار مهم و کلی‌اند و بحث دربارهٔ آنها و ذکر نمونه‌های متنوع مسائلی کـه از آنها استفاده می‌کنند، می‌تواند موجب تقویت درك شهودی شود.

کمتر پیش‌می‌آیدکه در دبیرستان مسئله‌هایی به‌دانش‌آموزان داده شودکه مفروضات آن‌کمتر یا بیشتر از مقدار لازم باشد. پرسشهایی از این قبیل، به بالا بردن درك شهودی دانش‌آموزان‌کمك می‌کند:

- آیا داده‌های مسئله برای حل آن‌کافی است؟
- چگونه می‌توان این داده‌ها را تکمیل‌کرد؟

و اگر داده‌ها بیش از حد لازم است:

- ابتد ازچه فرضهایی باید برای حل استفاده‌کرد؟
- چه فرضهایی را باید برای بحث وتفسیرمسئله‌گذاشت؟

در بند ۴گفتیم که برای تجزیه وتحلیل درسطح شهودی، باید تاآن‌جاکه ممکن است آگاهی را جمع‌کرد تـا بشود نتیجهٔ مورد انتظار را بهتر حدس زد. وبرای دانش‌آموزان چقدرجالب است‌که بتوانند با درك شهودی و "عقل‌سلیم" و بدون یاری‌گرفتن از معادله‌ها و دستورهـا، جواب درست مسئله را پیداکنند. این در واقع‌کشف دانش‌آموز است و هم اوست‌کـه چقدر ازکشف‌کردن لذت می‌برد. البته، اگر مسئله هوشیارانه تنظیم شده باشد، حتی نوع تشکیل معادله‌ها هم می‌تواندکشف به‌حساب آید.

در رمـان معروف ویتیا درخانه و مدرسه (۱۹۵۱) اثر نیکلای نیکلایویچ نوسوف، پیشامد جالبی شرح داده شده است: "پسر و دختری ۶۰گردو به‌دست‌آوردند وآنها را بین خود تقسیم‌کردند، ولی به‌پسر دوبرابر دختر رسید. هرکدام چندگردو دارند؟" ویتیا مدتی روی‌مسئله فکرمی‌کند،ولی‌نمی‌تواندراه‌حلی‌برای‌آن پیداکند. سرانجام دراین‌باره می‌اندیشد که چرا‌گردوها را عادلانه تقسیم‌نکرده‌اند؟ چرا پسردوبرابر دختر ازگردوها برداشته‌است؟

پیش خود فکر می‌کند لابد به این خاطر که پسر دوجیب داشته است، درحالی‌که دختر یك جیب. ویتیا پسری را با دوجیب ودختری را با یك جیب رسم می‌کند، وآن وقت بلافاصله مسئله حل می‌شود.

۷. تجزیه وتحلیل جواب

تجزیه وتحلیل جواب مسئله می‌تواند کمك زیادی به بالا بردن درك شهودی کند. پس از آنکه جواب پیدا شد، می‌توان مثلا پرسید:

- آیا انتظارچنین جوابی را داشتید؟
- آیا جواب با "عقل سلیم" سازگار است؟ و اگر پاسخ منفی است، چرا؟ اشکال کار را درکجا می‌بینید؟
- آیا جواب غیر منتظره نیست؟
- آیا نمی‌توان مسئله را طور دیگری حل کرد؟ (و اگرممکن است باید راه حلهای مختلف را ارائه داد وآنها را با هم مقایسه کرد.)
- اگرمسئله شامل پارامتر است، این پارامترچه تأثیری برجواب می‌گذارد؟
- اگر پارامتر به بینهایت میل کند، وضع جواب چگونه می‌شود؟

در این زمینه کتاب بسیار جالب خلاقیت ریاضی ژرژ پولیا را توصیه می‌کنیم که لازم است هرمعلم ریاضی‌آن را بخواند.

۸. شهود هندسی در درسهای آنالیز و جبر

درحل معادله‌ها، نامعادله‌ها، وهرگونه بحث مربوط به‌تابعها، تعبیرهندسی جواب یا راه‌حل می‌تواند دربالا بردن درك شهودی کمك کند. به‌همین مناسبت دائماً باید ازنمودارها، چه با رسم دقیق و چه به‌صورت ذهنی، به‌ویژه برای طرح مقدمات آنالیز استفاده‌کرد.

استفاده ازنمودارها درحل مسئله‌ها موضوعی‌گسترده است‌که برای پرداختن به‌آن به مقاله‌ای جداگانه نیازخواهد بود.

۹. ساختن نمونه‌ها و مثالها

مسائل مربوط به‌پیداکردن عددها، معادله، وتابعهایی‌که شرایط ویژه‌ای داشته باشند، دربالا‌بردن درك شهودی نقش اساسی دارند. این‌گونـه مسائل علاوه برآن‌که زیبا و جالب‌اند، ذهن را به‌کار می‌اندازند و موجب خلاقیت فکری می‌شوند. مسائلی ازقبیل:

- نموداری از یك تابع صعودی بکشیدکه مشتق‌آن نزولی باشد (رو به‌بالا برود و مقعر باشد). وکمی دشوارتر:
- نمونه‌ای از یك‌تابع را با خاصیت بالا مشخص‌کنید ($y=\sqrt{x}$ ، $y=\log x$، $y=-۲^{-x}$، ...)
- تابعی صعودی پیداکنیدکه نقطه‌ای ناپیوستگی داشته باشد.

- تابع پیوستهٔ صعودیی پیداکنیدکه مشتق آن درهمه‌جا تعریف شده نباشد.
- تابع مشتق‌پذیر صعودیی پیدا کنید که مشتق آن همه‌جا مثبت نباشد.
- تابعی بیابید که درهمه‌جا، جز نقطه‌های مفروض، مشتق داشته باشد.
- تابع f ی پیدا کنیدکه برای‌آن $\int_0^{2k} f(x)\,dx = 0$ و $\int_0^{2k+1} f(x)\,dx = 1$، $k = 0, 1, 2, \ldots$.

و مسئله‌ای چون این (که جواب ندارد):

- آیا تابع پیوسته‌ای وجود داردکه دو ماکزیمم داشته باشد، ولی مینیمم نداشته باشد؟

۱۰. نتیجه‌گیری

بیش ازهمه طرح مسائلی مفید است که شاگردان بتوانندآنها را درذهن وبدون محاسبه حل کنند. مسئله باید طوری باشدکه مشابهی نداشته باشد، بتوان دربارهٔ‌آن فکرکرد، حدس زد، برآوردکرد و...

شاگردان را وادارکنید معادلهٔ درجه دوم را حل‌کنند، ولی نه از روی فرمول؛ الگوریتم خوب است، ولی تکیهٔ زیاد برآن دانش‌آموز را ازفکرکردن باز می‌دارد.

برای دانش‌آموزان معماهایی طرح‌کنیدکه رنگ ریاضی داشته باشند، وآنها را تشویق‌کنیدکه دربارهٔ واژه‌ها و معنای ریاضی‌آنها فکرکنند.